Εισαγωγή στις Διαφορικές Εξισώσεις, Ιούνιος 2022

Θέμα 1

Δίνεται η εξίσωση

$$y''(t) + 2y'(t) + 2y(t) = f(t),\ t \geq 0,$$

όπου $f\colon [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση για την οποία υπάρχουν $M > 0$ και $t_0 \geq 0$ τέτοια ώστε $|f(t)| \leq M$, για κάθε $t \geq t_0$. Να εξετασθεί η ορθότητα των προτάσεων:

(i) [1.2] Υπάρχει λύση y_0 της εξίσωσης με $|y_0(t)| \leq 2M$, για κάθε $t \geq t_0$.

(ii) [0.8] Όλες οι λύσεις της εξίσωσης είναι φραγμένες.

(iii) [0.5] Αν $f(t) = \dfrac{\sin t}{t+1}$, τότε όλες οι λύσεις της εξίσωσης τείνουν στο μηδέν, για $t \to +\infty$.

Θέμα 2

(i) [2] Να επιλυθεί το π.α.τ

$$(x - x^2 + xy)y'(x) = 1 + y^2(x) + 2y(x),\ y(1) = \gamma,\ x \geq 1$$

για τις τιμές $\gamma = 2, -1$.

(ii) [0.5] Να εξετασθεί η ορθότητα της πρότασης : «για $\gamma < -1$ κάθε λύση του π.α.τ είναι φθίνουσα και φραγμένη.»

Θέμα 3

(i) [2] Να επιλεγούν οι σωστές απαντήσεις και να αιτιολογηθούν πλήρως.
Για την εξίσωση

$$y'(t) + \sin^2(t)y(t) = \begin{cases} 12 - 3t & , \quad x \in [0, 4] \\ 0 & , \quad x \in (4, +\infty) \end{cases}$$

(a) Δεν υπάρχει λύση y με $y(2022) = 2022$.

(b) Όλες οι λύσεις τείνουν στο μηδέν, για $t \to +\infty$.

(c) Υπάρχουν ταλαντούμενες λύσεις.

(d) Όλες οι λύσεις είναι τελικά σταθερές.

(e) Αν y είναι μία λύση με $y(2022) = 0$, τότε η y είναι μηδενική.

(f) Κανένα από τα προηγούμενα.

(ii) [0.5] Να υποδειχθεί ένας τρόπος επίλυσης της εξίσωσης

$$xy'' + (1 - x)y' + 2y = 0$$

γύρω από το σημείο $x_0 = 0$.

Θέμα 4

(i) [1.8] Να εξετασθεί ως προς την ύπαρξη και το μονοσήμαντό λύσεων ορισμένων σε ολόκληρο το διάστημα $I = [4, +\infty)$ το π.α.τ

$$y'(t) = \frac{2te^{-y^2}\sin 2y + t^2 + 7}{t^4 + 5t^2 + 4},\ y(2022) = b \in \mathbb{R},\ t \geq 4$$

(ii) Να εξετασθεί η ορθότητα των προτάσεων: A) [0.4] Όλες οι λύσεις του π.α.τ είναι φραγμένες και B) [0.3] Όλες οι λύσεις του π.α.τ είναι συγκλίνουσες, για $t \to +\infty$.

Θέμα 5

Θεωρούμε τη διαφορική εξίσωση

$$yy'' = (y')^2 + y^2 y'$$

(i) [1.2] Να επιλυθεί η παραπάνω διαφορική εξίσωση.

(ii) [0.3] Να υποδειχθεί ένας τρόπος επίλυσης της εν λόγω εξίσωσης, διαφορετικός από αυτόν που δόθηκε στο ζήτημα (i)

(iii) [1] Να αποδειχθεί ότι αν $\{y_1(t), \dots, y_n(t); t \in I\}$ είναι ένα βασικό σύνολο λύσεων μιας ομογενούς γραμμικής διαφορικής εξίσωσης $n-$ τάξης, τότε για κάθε λύση y_0 της εξίσωσης, υπάρχουν μοναδικές σταθερές $c_1, \dots, c_n$ τέτοιες ώστε

$$y_0(t) = c_1 y_1(t) + \cdots + c_n y_n(t),\ t \in I.$$

Θέμα 6

(i) [2] Να διατυπωθεί και να αποδειχθεί το Θεώρημα Liouville

(ii) [0.5] Ας είναι y_1, y_2 λύσεις της εξίσωσης

$$x^2 y'' + xy' + (x^2 - k^2)y = 0,\ x > 0$$

με k σταθερά και $y_1(1) = 1, y_1'(1) = 0, y_2(1) = 0$ και $y_2'(1) = 1$. Να βρεθεί η ορίζουσα Wronski των y_1 και y_2.

Να δοθούν απαντήσεις σε τέσσερα από τα έξι θέματα

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ